МЭ-2019

ШИФР УЧАСТНИКА | М-11-3

Олимпиадная работа по математике
Дата проведения «13» ноября 2019 г.

1	2	3	4	5	Итого
7	7	2	3	2	21

Задание 2.

1). Разобьём числа на 6 групп:

A: 1 ... 100

B: 101 ... 200

C: 201 ... 300

D: 301 ... 400

E: 401 ... 500

F: 501 ... 600

2) Пусть у нас чередуются числа так:

D, A, F, B, E, C, D, A и т.д.

3) Рассмотрим случай, когда мы рассматриваем ту часть строки, где взяты максимальные числа из группы:

400 (D), 100 (A), 600 (F), 200 (B), 500 (C), 300 (C)

500 700 800 700 800

(мы видим, что сумма двух соседних чисел не превосходит 800, то есть $\Sigma \le 800$)

4) Таким образом, мы видим, что сумма чисел, стоящих через одного может быть больше 800:

400 (D) + 600 (F) = 1000 > 800

600 (F) + 500 (C) = 1100 > 500

ч.т.д.

Задание 3

$m^2 + \sqrt{m^2+m} \vee n^2 - \sqrt{n^2-n}$, $m < n$

Решение: $m, n \in N$

Пусть $(m^2 + \sqrt{m^2+m}) = a$, $(n^2 - \sqrt{n^2-n}) = b$;

Если $a - b > 0$, то $a > b$;

Если $a - b < 0$, то $a < b$;

Тогда $m^2 + \sqrt{m^2+m} - n^2 + \sqrt{n^2-n} \vee 0$;

$\underbrace{(m^2-n^2)}_{<0} + \underbrace{(\sqrt{m^2+m} + \sqrt{n^2-n})}_{>0} \vee 0$; *

1) $m < n$,

$m^2 < n^2$,

$m^2 - n^2 < 0$;

2) $\begin{cases} m^2+m \geq 0, \\ n^2-n \geq 0, \end{cases}$ – подкоренное выражение – неотрицательное,

сумма будет больше 0 :

$\sqrt{m^2+m} + \sqrt{n^2-n} > 0$

3) $(\sqrt{m^2+m} + \sqrt{n^2-n}) > (m^2-n^2)$, исходя из того,

что $m^2 > \sqrt{m^2+m}$? и $n^2 > \sqrt{n^2-n}$?

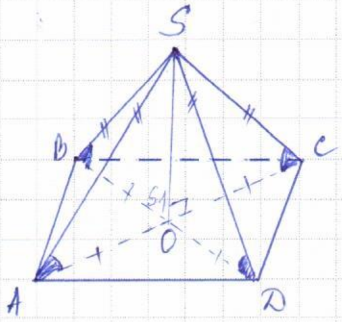
$m^4 > |m^2+m|$ $n^4 > |n^2-n|$

4) Следовательно $(\underset{<0}{m^2-n^2}) + (\underset{>0}{\sqrt{m^2+m} + \sqrt{n^2-n}}) > 0$ *

или $a - b > 0$, тогда $a > b$ $\Rightarrow$

$m^2 + \sqrt{m^2+m} > n^2 - \sqrt{n^2-n}$

Задание 4



Дано: $SABCD$ – пирамида

$O \in (ABC)$

$SA = SB = SC = SD$ (*)

$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$ (**)

Д-ть: SO – высота $SABCD$

Доказательство:

1) Для того, чтобы выполнилось одно из условий задачи (*), необходимо S расположить так, чтобы эта точка была равноудалена от вершин $ABCD$. Проекция этой точки (S_1) на основание тоже должна быть равноудалена от вершин $ABCD$, то есть $AS_1 = BS_1 = CS_1 = DS_1$

2) Пусть точки O и S_1 не совпадают, тогда O автоматически не может быть равноудалённой от вершин $ABCD$, тогда не выполняется (**) условие задачи.

3) Следовательно O и S_1 должны совпадать. Т.к. SS_1 – высота пирамиды $SABCD$, то SO – тоже является высотой

ч.т.д.

Ответ: да, следует. SO – высота пирамиды.

Задание 1

$20^{50} \cdot 50^{20}$; последняя ненулевая цифра числа – ?

Решение:

1) $20^{50} \cdot 50^{20} = (2 \cdot 10)^{50} \cdot (5 \cdot 10)^{20} = 2^{50} \cdot 5^{20} \cdot 10^{70}$;

$20^{50} \cdot 50^{20} = (2 \cdot 2 \cdot 5)^{50} \cdot (5 \cdot 5 \cdot 2)^{20} = (2^2)^{50} \cdot 5^{50} \cdot (5^2)^{20} \cdot 2^{20} =$

$= 2^{100} \cdot 5^{50} \cdot 5^{40} \cdot 2^{20} = 2^{120} \cdot 5^{90} = 2^{90} \cdot 2^{30} \cdot 5^{90} =$

$= (2 \cdot 5)^{90} \cdot 2^{30} = 10^{90} \cdot 2^{30}$

2) Пусть $10^{90} \cdot 2^{30} = A$; последняя цифра (ненулевая) числа A – последняя цифра числа 2^{30}, т.к. 10^{90} – приписывает к 2^{30} 90 нулей.

3) $2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
и т.д.

Мы можем заметить закономерность, что возводя двойку в степень, у нас <u>всегда</u> чередуются 2, 4, 8, 6 на конце числа...

Таким образом, мы можем посчитать, чем окончится 2^{30}

4) 30 степень ; наша закономерность сделает 7 полных „оборотов", т.к. $\frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$

$2^{29} = ...**2$

чередуются $2 \to 4 \to 8 \to 6$

$2^{30} = ...**4$

5) $A = ***4\underbrace{0000....0}_{90}$

Ответ: 4-последняя ненулевая цифра числа

Задание 5

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(x) = x$ (не имеет действительных корней)

$\underbrace{P(P(...P}_{2019}(x)...)) = x$ − ?

Решение:

1) $ax^2 + bx + c = x$

$ax^2 + bx + c - x = 0$

$ax^2 + (b-1)x + c = 0$

не имеет действительных корней

2) $P(P(...P(x)...)) = x$ (*)

$P(P(x)) = a(ax^2 + (b-1)x + c)^2 + (b-1)(ax^2 + (b-1)x + c) + c$

Ответ: уравнение (*) тоже не имеет действительных корней.

Басиров 21

Проверели:

1)	2	3	4	5	итог
7	7	1	3	0	18

МЭ-2019

ШИФР УЧАСТНИКА	М-11-16

Олимпиадная работа по математике
Дата проведения «13» 11 2019 г.

Задание 1.

$20^{50}\cdot 50^{20}$

Преобразуем выражение:

$20^{50}\cdot 50^{20} = 20^{20}\cdot 20^{30}\cdot 50^{20} = (20\cdot 50)^{20}\cdot 20^{30} = 1000^{20}\cdot 20^{30}$

по свойству степеней

$x^a\cdot x^b = x^{a+b}$ $\quad (20^{50} = 20^{20}\cdot 20^{30})$

$a^x\cdot b^x = (a\cdot b)^x$ $\quad (20^{20}\cdot 50^{20} = (20\cdot 50)^{20})$

1000^{20} – последняя ненулевая цифра – 1.

20^{30}. Чтобы узнать последнюю ненулевую цифру, возведем 2 в 30 степень:

$2^{30} = 2^{10}\cdot 2^{10}\cdot 2^{10} = 1024\cdot 1024\cdot 1024$.

~~то~~ 1)

$\times$ 1024
1024
4096
+ 2048
1024
1048576

2)

$\times$ 1048576
1024
. 4
+
4

Последняя ненулевая цифра у числа 20^{30} – это 4.

1000^{20} – последняя ненулевая цифра 1

20^{30} – последняя ненулевая цифра 4

$1\times 4 = 4$

Ответ: у числа $20^{50}\cdot 50^{20}$ последняя ненулевая цифра – это 4.

Задание 3.

Дано:
$m, n \in N$
$m < n$

$$m^2 + \sqrt{m^2+m} \; \boxed{?} \; n^2 - \sqrt{n^2-n}$$

$m^2 < n^2$, т.к. $m < n \Rightarrow$

$m \cdot m < n \cdot n$

$\sqrt{m^2+m} < \sqrt{n^2-n}$ возведем в квадрат

$\underset{м}{m^2} + \underset{м}{m} < \underset{б}{n^2} - \underset{б}{n}$

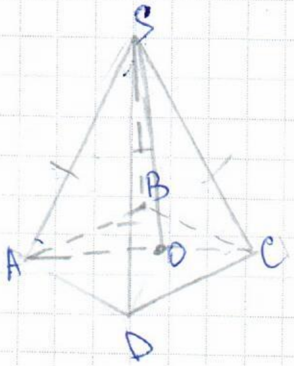
$m^2 < n^2$
$m < n$

$m^2 < n^2$
$\sqrt{m^2+m} < \sqrt{n^2-n} \Rightarrow$

$m^2 + \sqrt{m^2+m} \overset{?}{<} n^2 - \sqrt{n^2-n}$

Ответ: $m^2 + \sqrt{m^2+m} < n^2 - \sqrt{n^2-n}$

Задание 4



Дано
$SABCD$ – пирамида
$ABCD$ – основание $SABCD$
$O \in (ABC)$
$SA = SB = SC = SD$
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$
~~SO~~ Является ли SO высотой пирамиды?

SO может не являться высотой пирамиды.
$SA = SB = SC = SD \Rightarrow$
пирамида правильная.
Боковые треугольники равны между

собой и являются равнобедренными
Углы SAO, SBO, SCO, SDO
равны потому, что O лежит в основании пирамиды, а треугольники равны.

Рассмотрим $\triangle SAC$, чтобы доказать, что O может не являться высотой пирамиды.
$\triangle SAC$ – равнобедренный, т. к $SA = SC \Rightarrow$
$\angle SAC = \angle SCA$.
В р/б $\triangle$ высота делит основание пополам. Если SO – высота пирамиды, то она должна находиться под точкой O (SO должна быть $\perp$ (ABCD)) $\Rightarrow$ ~~точк~~ тогда O должна лежать на прямой AC и BD (являться точкой пересечения этих прямых).
Пусть $O \in AC$.
Тогда $\triangle SAO$ должен быть равен $\triangle SCO$.
по 2 сторонам и углу между ними
$SA = SC$, $\angle SAO = \angle SCO$..

Нужно, чтобы еще ~~А~~AO была равна
OC, но этой информации
нет в ~~я~~ условии задачи
Следовательно, точка O может
не лежать на прямой AC,
~~∆~~∆SAO может быть не равен ∆SCO.
и точка O ~~х~~ может не
располагаться под точкой S,
а следовательно, SO может не
являться высотой пирамиды.
Ответ: нет, не следует, что SO - высота
пирамиды.

Задание 5

Ответ: нет, не обязательно, т.к.

$\underbrace{P(P(\ldots P(x)\ldots))}_{\text{повторяется 2019 раз}} = x$ 2019 - нечетное число.

Задание 2

Числа, которые в сумме дают больше 800,
~~находят~~ от 201 до 600 (т.к 201+600 = 801,
минимальное число, которое > 800)
Этих чисел 399. Остальных чисел 201.
Числа которые дают в сумме больше 800
обязательно хоть раз будут располагаться
через одно число, т.к. рядом они стоять не
могут

баллов 18
Проверили: