Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2019-2020 учебный год

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

7 класс

1. Ответ: 28.

   Решение. Высказывания, в которых фигурирует одно и то же число, объединим в пару. Таким образом, получим 29 пар. Если на доске написано число a, то в каждой паре, кроме той, где фигурирует число a, одно высказывание верно, а второе ложно, а в паре, где фигурирует число a, оба высказывания ложны.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ без обоснования или недостаточно обоснованный – 3 – 5 баллов.

2. Ответ: 26.
   Решение. Количество учеников в 7 «Е» классе, без учета Пети и Васи превышает 18, но меньше 28. Пусть X учеников класса интересуются и математикой, и физикой. Тогда всего математикой интересуются $5X$ учеников, а физикой – $4X$ учеников. Значит, математикой или физикой всего интересуются $5X + 4X – X = 8X$ учеников. Таким образом, количество учеников в классе, без учета Пети и Васи, должно делиться на 8. В границах от 18 до 28 есть только одно число, кратное 8 – это 24. Следовательно, 8X = 24, а всего в классе 26 человек.

   Критерии. Верное обоснованное решение – 7 баллов; верный ответ, показано, что он удовлетворяет условию, но не доказана его единственность – 4 балла; приведен только верный ответ – 1 балл.

3. Ответ: 42 минуты.
   Решение. До встречи Печкин проехал путь, в шесть раз больший, чем прошел Матроскин. К тому времени, когда Печкин вернулся обратно, Матроскин прошел еще столько же, сколько до встречи. Следовательно, за 30 минут ему осталось пройти в пять раз больше, чем было пройдено до встречи. То есть до встречи с Печкиным Матроскин шел 6 минут. Следовательно на весь путь он потратил $6 + 6 \cdot 6 = 42$ минуты.

   Критерии. За верный ответ с обоснованием – 7 баллов; за верный ответ без обоснования – 4 балла.

4. Ответ: 72 см^2; 90 см^2; 120 см^2.
   Решение. Найдем площадь четвертого из этих прямоугольников. Она зависит от того, какой прямоугольник расположен по диагонали напротив него. Заметим, что произведение площадей прямоугольников, расположенных по диагонали, равны.

c	d	
$S_1 = a \cdot c$	$S_2 = a \cdot d$	a
$S_3 = b \cdot c$	$S_4 = b \cdot d$	b

   Действительно, $S_1 \cdot S_4 = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d) = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c) = S_2 \cdot S_3$. Поэтому, если по диагонали расположен прямоугольник площади 12 см^2, то его площадь равна 54 см^2, если прямоугольник площади 18 см^2 – тогда его площадь равна 24 см^2, наконец, если по диагонали расположен прямоугольник площади 36 см^2 – тогда площадь четвертого прямоугольника равна 6 см^2. Таким образом, имеем три варианта площади исходного прямоугольника – или 120 см^2, или 90 см^2, или 72 см^2.

Критерии. Полный обоснованный ответ – 7 баллов; обоснованно получены два числа из трех – 5 баллов; найдено только одно число – 2 балла.

5. Ответ: 549, 558, 567, 576, 585, 594.

   Решение. Обозначим искомое число $\overline{abc}$, тогда $\overline{abc} + \overline{acb} = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 200a + 11(b + c)$. Так как *a, b, c* – цифры, то $200a = 1000$, $11(b + c) = 143$. Откуда $a = 5$, $b + c = 13$. Перебирая все возможные варианты последнего равенства, получим ответ.

   Критерии. Полный обоснованный ответ – 7 баллов; если в ответе указаны только по одному числу из каждой пары – баллы не снимаем; обоснованно получен хотя бы один верный ответ – 4 балла; приведен хотя бы один верный ответ без пояснений – 2 балла.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2019-2020 учебный год

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

8 класс

1. Ответ: нельзя.
   Решение. Так как грузовиков 7, а камней 50, то на одном из грузовиков нужно будет увезти не менее 8 камней. Однако, сумма восьми самых легких камней равна 370+372+374+376+378+380+382+384 = $(370+384)\cdot 4 = 3016$ *кг* > 3 *т*. Заметим, что необходимое условие для решения задачи выполняется, а именно, что общая грузоподъемность 7 грузовиков превышает общую массу всех камней, равную $\frac{370+468}{2}\cdot 50 = 20950$ кг.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; проверено необходимое условие и дан положительный ответ – 1 балл; любой ответ без пояснений – 0 баллов.

2. Ответ: 95 дубов.
   Решение. Чтобы количество дубов было наибольшим необходимо, чтобы число ДУБ было наименьшим, при выполнении условия задачи; все цифры в числах ДУБ и РОЩА должны быть различными. Наименьшее трехзначное число, в записи которого все цифры различны, является число 102. При этом наибольшее четырехзначное число кратное 102 и в записи которого все цифры различны и отличны от цифр числа 102, будет 9486. В этом случае количество дубов равно $9486 : 102 = 93$. Для следующего трехзначного число 103 наибольшее значение числа РОЩА равно 9785, а количество дубов 95. Для числа 104 наибольшие значения, которые может принимать РОЩА – это числа 9985 и 9880. Но они не удовлетворяют условию задачи, а для меньших значений число дубов будет меньше 95. Для чисел больших 104 наибольшее четырехзначное число, кратное этому числу, уже дает не больше 95 слагаемых.

   Критерий. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; не рассмотрен отдельно случай для числа 104 – минус 1 балл; верно рассмотрен только случай для числа 102 – 3 балл; получен неверный ответ для числа 102 – 1 балл.

3. Ответ: 90^0; 60^0.
   Решение. В прямоугольном треугольнике *ACH* угол *A* равен 30^0, следовательно, противоположный катет *CH* равен половине гипотенузы *AC*. Так как *CH* равен *BM* и *M* – середина *AC*, то *BM* = *AM* = *MC*, то есть треугольники *ABM* и *MBC* – равнобедренные. Следовательно, угол *ABM* равен 30^0, угол *BMC* = 60^0, как внешний к треугольнику *ABM*. Но равнобедренный треугольник с углом при вершине 60^0 является равносторонним.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; замечено, что *CH* равен половине гипотенузы *AC* – 3 балла.

4. Ответ: 25 жителей.
   Решение. Пусть на острове a рыцарей и b лжецов. Тогда из первого условия имеем $2ab = 272$ (каждый лжец солжет про каждого рыцаря и каждый рыцарь скажет правду про каждого лжеца). Аналогично, если на втором собрания отсутствовал лжец, то имеем равенство $2a(b - 1) = 256$, а если рыцарь, то $2(a - 1)b = 256$. В первом случае, подставляя значение $2ab$ из первого равенства во второе, получим $272 - 2a = 256$, откуда $a = 8, b = 17$. Аналогично, во втором случае получим $b = 8, a = 17$. В обоих случаях число жителей на острове равно $a + b = 25$.

Критерии. Верный ответ при рассмотрении всех случаев – 7 баллов; рассмотрен один из случаев – 4 балла; только ответ – 1 балл.

5. Ответ: тупым.
Решение. Обозначим середины сторон BC и CD через M и N соответственно, и пусть отрезок AM вдвое короче отрезка AN. Продолжим отрезок AM до пересечения с продолжением стороны CD в точке K. Из равенства треугольников ABM и MKC получаем, что $AM = MK$, следовательно, $AK = 2AM = AN$. Поскольку треугольник AKN равнобедренный, то углы при основании равнобедренного треугольника острые. Таким образом, угол ANK – острый, и является внешним к треугольнику AND, и значит угол ADN, не смежный с ним, тоже острый, а тогда угол BAD – тупой. Аналогично рассматривается случай, когда отрезок AN вдвое короче отрезка AM.
Ту же идею можно реализовать, если в начале не продолжать отрезок AM, а соединить точку M с серединой отрезка AN. Снова получим равнобедренный треугольник и далее как в приведенном выше решении.

Критерии. Верное доказательство – 7 баллов; построен равнобедренный треугольник – 3 балла; верный ответ без пояснений, или с неверным обоснованием – 0 баллов.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

9 класс

1. Ответ**:** тех и других квадратных трёхчленов поровну.
Решение. Из условия на коэффициенты следует, что рассматриваемых квадратных трёхчленов конечное число. Разобьём это множество квадратных трехчленов на пары: $x^2 + 2mx + n^2$ и $x^2 + 2nx + m^2$. Эти трехчлены имеют дискриминанты $m^2 - n^2$ и $n^2 - m^2$. Так как m и n различные натуральные числа, то дискриминант не может равняться нулю и, поэтому, если один из них имеет корни, то другой не имеет корней. Таким образом, их поровну.

Критерий. Обоснованный ответ – 7 баллов; ответ без пояснений – 0 баллов.

2. Ответ: нет.
Первое решение. Назовем пару чисел, сумма которых равняется простому числу, хорошей. Так как сумма двух различных натуральных чисел не может равняться 2, то сумма чисел в хорошей паре есть нечетное простое число. Поэтому в каждой хорошей паре одно число четное, а другое нечетное. Число 1 образует хорошие пары с числами 2, 4, 6; число 2 – с числами 1, 3, 5, 9; число 3 – с 2, 4 и 8; число 4 – с 1, 3, 7, и 9; число 5 – с 2, 6 и 8; число 6 – с 1, 5, 7; число 7 – с 4 и 6: число 8 – с 3, 5, 9; число 9 – с числами 2, 4 и 8. Из приведенного списка видно, что в центральной клетке квадрата 3 на 3 может быть расположено только одно из чисел 2 или 4, каждое из которых входит в четыре различные хорошие пары. Причем в четырех соседних клетках, в этом случае, будут расположены нечетные числа. Но тогда пятое нечетное число нельзя будет расположить ни в одну из угловых клеток, так как его соседями будут нечетные числа, а, следовательно, их сумма не будет простым числом.
Второе решение. Среди натуральных чисел от 1 то 9 пять нечетных и 4 четных числа. Поскольку числа одной четности не могут быть в соседних клетках, то в центральной клетке должно быть расположено нечетное число. Но ни одно нечетное число не образует 4 хорошие пары.

Критерий. Обоснованный ответ – 7 баллов; замечено, что в центральной клетке не может стоять четное число – 2 балла; рассмотрены отдельные примеры – 0 баллов.

3. Ответ; Ваня, Петя, Олег.

Решение. В начале заметим, что если два участника четное число раз менялись местами друг с другом, то они финишировали в том же порядке, в котором стартовали, а если нечетное число раз, то в обратном порядке. Положение, когда участники забега меняются местами, назовем обгоном. В каждом обгоне участвуют два участника, поэтому суммарное число обгонов, совершенных всеми участниками забега будет четным. Так как у Олега четное число, а у Пети нечетное число, то у Вани – нечетное число обгонов. Поскольку Ваня стартовал после Пети, а финишировал раньше, то Ваня с Петей участвовали в нечетном числе обгонов друг с другом. Тогда каждый из них участвовал четное число раз в обгонах с Олегом. Следовательно, Олег финишировал и позже Вани, и позже Пети.

Замечание. Без заключения о том, что и Ваня, и Петя участвовали в четном числе обгонов с Олегом, нельзя сделать вывод, что Олег финишировал последним. Четное число обгонов у Олега могло получиться и в случае, когда он нечетное число обгонов совершил с каждым из них, и тогда он финишировал бы первым. В этом случае и у Вани, и у Пети должно было быть четное число обгонов, что противоречит условию задачи.

Критерии. Обоснованный ответ – 7 баллов; нет обоснования, что Олег финишировал последним – не более 4 баллов; верный ответ без обоснования – 1 балл.

4. Ответ: 999609.

   Решение. Наибольшее пятизначное число, кратное 17 равно 99994. Но чисел кратных 19 среди шестизначных чисел от 999940 до 999949, полученных приписыванием цифры к числу 99994, нет. Следующее пятизначное число кратное 17 – это 99977. И в этом случае среди шестизначных чисел от 999770 до 999779 нет чисел кратных 19. А вот для следующего пятизначного числа 99960, кратного 17, имеется шестизначное число 999609, кратное 19. Оно и будет наибольшим.

   Замечание. Можно вести поиск начиная с наибольшего шестизначного числа, кратного 19. В этом случае потребуется 20 шагов вместо трех рассмотренных.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; за отсутствие проверки верных утверждений о делимости или не делимости чисел – баллы не снимаем; за неполный перебор с верным ответом – 4 - 5 баллов.

5. *Решение*. Рассмотрим треугольник ACD. Поскольку $\angle ADC = 60^0$, то сумма двух других $\angle ACD + \angle CAD = 120^0$. По условию $AD > DC$, и так как против большего угла лежит большая сторона, то $\angle ACD > \angle CAD$, а это значит, что больший угол $\angle ACD > 60^0 = \angle ADC$. Следовательно, $AD > AC = BC$, и $AD + DC > AC + DC = BC + CD > BD$.

   Критерии. Обоснованное доказательство неравенства – 7 баллов; найдено соотношение для углов треугольника ACD – 3 балла.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

10 класс

1. Ответ: 0, 4.
Решение. Пусть $x_1,\ x_2$ - корни уравнения $x^2+ax+a=0$, и один из них целый корень. По теореме Виета имеем $x_1+x_2=-a,\ \ x_1\cdot x_2=a$. Так как a и один из корней – целые числа, то и второй корень – целое число. Исключая из равенств a, получим $x_1\cdot x_2+x_1+\ x_2=0$, или, прибавляя к обеим частям по 1, и разлагая левую часть на множители, получим $(x_1+1)(x_2+1)=1$. Возможны два варианта: либо оба множителя левой части равны 1, либо -1. В первом случае получим $x_1=x_2=0$, во втором - $x_1=\ x_2=-2$. Для найденных корней из исходных равенств находим a = 0, либо a = 4.
Критерии. Обоснованно найдены все значения – 7 баллов; потеряно одно из значений – 4 балла; приведен ответ, но не доказано, что других решений нет – 1 балл; указан только ответ 0 – 0 баллов.

2. Ответ: 998412.
Решение. Наибольшее четырехзначное число, кратное 13, равно 9997. Среди чисел от 99970 до 99979 имеется число 99977, кратное 17, но среди чисел от 999770 до 999779 нет числа кратного 19. А вот для следующего числа 9984, кратного 13, число 99841 делится на 17, а число 998412 делится на 19.
Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ, но не доказано, что число наибольшее – 4 балла; неверный ответ – 0 баллов.

3. *Решение*. Если $x>0$ то $x^3>0$. Тогда $t>x^3>0,\ \ z>t^3>0$ и $y>z^3>0$, то есть все числа положительные. Если $x<0$, то $y^3<x<0$, откуда $y<0$. Аналогично, из условия $z^3<y<0$ получаем, что $z<0$, а из неравенства $t^3<z<0$, что $t<0$, то есть в этом случае все числа отрицательные, а их произведение положительно. Наконец, если $x=0$, то, как и в первом случае, получаем последовательно $t>0,\ \ z>0,\ y>0$ и $x>0$, либо, как во втором случае, $y<0,\ \ z<0, t<0$ и $x<0$. В обоих случаях получаем противоречие.
Критерии. Верное доказательство – 7 баллов; не рассмотрен случай $x=0$ – 5 баллов.

4. Ответ: $2^{12}-1$.
Решение. Всего различных наборов (включая пустой набор) из 13 чисел 2^{13}. Покажем, что ровно половина из них хорошие. Действительно, так как сумма всех чисел от 1 до 13, равная 91, число нечетное, то для каждого хорошего набора чисел оставшиеся числа образуют плохой набор, то есть набор, сумма чисел которого – нечетное число. Верно и обратное, для каждого плохого набора оставшиеся числа образуют хороший набор. Поскольку набор из всех чисел плохой, то соответствующий ему хороший набор – пустое множество, которое не удовлетворяет условию задачи.
Критерии. Обоснованный ответ – 7 баллов; учтен пустой набор – минус 1 балл; ответ без обоснования – 1 балл.

5. Решение. Имеем $\angle AFB = \angle FBC = \angle DBC = \angle DAC$. Первое равенство следует из параллельности прямых AF *и* BC, *второе равенство – из того, что точка* D *лежит на отрезке* FB, *наконец, третье равенство следует из равенства вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Так как* $\angle AFB = \angle AFD$, а последний опирается на дугу AD окружности, описанной вокруг треугольника ADF, то *угол между хордой* AD и секущей AC равен половине дуги, заключенной между ними, то есть AC является касательной к окружности, описанной вокруг треугольника ADF.
Критерии. Верное доказательство – 7 баллов; замечено первое равенство углов – 2 балла, замечено третье равенство углов – плюс еще два балла.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

11 класс

1. Ответ: 4.

Решение. $20^{50}\cdot 50^{20} = 20^{30}\cdot(20\cdot 50)^{20} = 2^{30}\cdot 10^{30}\cdot 10^{60} = 2^{30}\cdot 10^{90}$. Таким образом, последней ненулевой цифрой данного числа является последняя цифра числа 2^{30}. Найдем последние цифры первых степеней двойки: 2^1 - 2, 2^2 – 4, 2^3 - 8, 2^4 - 6, 2^5 - 2. Далее последние цифры будут повторяться с периодом 4. Так как 30 = $4\cdot 7+2$, то последней цифрой числа 2^{30} является 4.

Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; верный ответ без обоснования – 1 балл.

2. *Решение.* Принцип Дирихле. Чисел от 400 до 600 ровно 201. Сумма любых двух из них больше 800. Разобьем выписанный ряд на тройки – таких троек будет ровно 200. Следовательно, какие-то два числа от 400 до 600 попадут в одну тройку. Рядом стоять они не могут. Значит, стоят через одного.

Критерий. Верное доказательство – 7 баллов; отмечено, что сумма любых двух чисел от 400 до 600 больше 800 – 2 балла; нет ссылки на принцип Дирихле – баллы не снижаем.

3. Ответ: второе число больше.

Первое решение. Очевидно, что если $k < m$, то $k^2+\sqrt{k^2+k} < m^2+\sqrt{m^2+m}$. Покажем, что если $n <$ p, $n^2-\sqrt{n^2-n} < p^2-\sqrt{p^2-p}$. Действительно, $p^2-\sqrt{p^2-p}-(n^2-\sqrt{n^2-n}) = (p^2-n^2)-\left(\sqrt{p^2-p}-\sqrt{n^2-n}\right) = (p^2-n^2)-\frac{(p^2-p)-(n^2-n)}{\sqrt{p^2-p}+\sqrt{n^2-n}} = (p^2-n^2)\left(1-\frac{1}{\sqrt{p^2-p}+\sqrt{n^2-n}}\right)+\frac{p-n}{\sqrt{p^2-p}+\sqrt{n^2-n}} > 0$, поскольку при $1\le n < p$, знаменатели больше 1, и все разности положительны. Учитывая доказанные неравенства, достаточно показать, что требуемое неравенство выполняется для $n = m + 1$. Имеем $(m+1)^2-\sqrt{(m+1)^2-(m+1)}-\left(m^2+\sqrt{m^2+m}\right) = 2m+1-2\sqrt{m^2+m} > 0$, так как $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 > 4m^2+4m = \left(2\sqrt{m^2+m}\right)^2$ и все числа положительные, то $2m+1-2\sqrt{m^2+m} > 0$.

Заметим, что неравенство $n^2-\sqrt{n^2-n} < p^2-\sqrt{p^2-p}$ достаточно было доказать для $p = n + 1$.

Второе решение. Для произвольных $m < n$ имеем $n^2-\sqrt{n^2-n}-\left(m^2+\sqrt{m^2+m}\right) = (n^2-m^2)-\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{m^2+m}\right) = (n^2-m^2)-\frac{(n^2-m^2)-(n+m)}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{m^2+m}} = (n^2-m^2)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{m^2+m}}\right)+\frac{(n+m)}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{m^2+m}}$. Если $n\ge m+2$, то нетрудно показать, что знаменатели больше 1, все разности положительны и неравенство выполняется. Но при $n = m+1$ знаменатель обращается в 0: $\sqrt{n^2-n}-$

$\sqrt{m^2+m} = \sqrt{(m+1)^2-(m+1)} - \sqrt{m^2+m} = \sqrt{(m+1)m} - \sqrt{m(m+1)} = 0.$
Поэтому этот случай необходимо рассматривать отдельно, как и в первом решении.

Критерии. Обоснованно получен ответ – 7 баллов; сравнение верно проведено только для соседних натуральных чисел – 4 балла; при сравнении в общем виде не рассмотрен случай соседних чисел - 3 балла.

4. Ответ: нет, не следует.

   Решение. Рассмотрим пирамиду *SABCD*, у которой основание *ABCD* является равнобокой трапецией, и центр H описанной окружности вокруг нее лежит вне этой трапеции. Пусть *SH* – высота пирамиды. Так как проекция вершины пирамиды на плоскость основания равноудалена от всех вершин основания, то все боковые стороны пирамиды равны между собой, то есть условие *SA* = *SB* = *SC* = *SD* выполнено. Далее, так как в равнобокой трапеции диагонали равны, то треугольники *ASC* и *BSD* равны по трем сторонам и все углы при основании этих равнобедренных треугольников равны. Поэтому, если O – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*, то условие $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$ тоже будет выполнено.

   Критерии. Верный обоснованный ответ – 7 баллов; замечено, что основание пирамиды – вписанный четырехугольник и вершина пирамиды проецируется в центр окружности – 2 балла; построен верный пример, но неопределенно положение точки *O* – 5 баллов.

5. Ответ: да, обязательно.

   Решение. Из условия следует, что уравнение $ax^2+bx+c=x \Leftrightarrow ax^2+(b-1)x+c=0$ не имеет решений. Это значит, что $a \neq 0$ и дискриминант квадратичного уравнения отрицательный. Следовательно, для любого x либо $P(x)>x$, если $a>0$, либо $P(x)<x$, если $a<0$. Таким образом, если $P(x)>x$ для любого x, то справедливы неравенства $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots) > \underbrace{P(P(\dots P}_{2018}(x)\dots) > \dots > P(x) > x.$
   Если $P(x)<x$, то аналогично $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots) < \underbrace{P(P(\dots P}_{2018}(x)\dots) < \dots < P(x) < x.$
   В обоих случаях уравнение $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots) = x$ не имеет решений.

   Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов; не отмечено, что $a \neq 0$ - минус 1 балл; доказано, что для любого x либо $P(x)>x$, либо $P(x)<x$ - 2 балла.