

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2021-2022 учебный год
9 класс

1. Остаток от одного натурального числа на 11 равен остатку от деления другого натурального числа на 13, а остаток от деления первого числа на 13 равен от деления на второго числа на 11. Докажите, что остаток от деления суммы этих чисел на 143 не превосходит 20.

2. При каком значении параметра a система уравнений имеет ровно 3 решения

$$\begin{cases} y - 2|x| - x^2 = -2 \\ 2y = a \end{cases}$$

3. На окружности взяты точки $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 4)$, в каждой из которых проведены касательные к этой окружности. Касательные, проведенные в точках A_1 и A_2 , пересекаются в точке B_1 . Касательные, проведенные в точках A_2 и A_3 , пересекаются в точке $B_2 \dots$ Касательные, проведенные в точках A_n и A_1 , пересекаются в точке B_n . Найдите сумму углов $B_1A_1A_2, B_2A_2A_3, \dots, B_nA_nA_1$.

4. Когда Незнайке приходит в голову гениальная идея, он записывает ее на листке бумаги, но тут же понимает, что идея не гениальная, комкает лист и кидает под стол, где стоят две мусорные корзины. Незнайка попадает в первую корзину с вероятностью p (где $p < 0,5$), и с такой же вероятностью он попадает во вторую. За утро Незнайка бросил под стол шесть скомканных гениальных идей. Найдите вероятность того, что в каждой корзине оказалось хотя бы по одной из утренних идей.

5. Имеются два бака: первый наполнен доверху глицерином, а второй – водой. Взяли два двухлитровых ковша, зачерпнули первым ковшом доверху глицерин из первого бака, а вторым ковшом – воду из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш - в первый бак. После перемешивания повторили эту операцию со смесью еще раз. В результате 40% объема первого бака занял чистый глицерин. Определить суммарный объем баков, если по объему второй бак в 4 раза больше первого.