ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

7 класс

1. *Ответ:* 8910

Решение:

У чисел 2, 5, 9 и 11 нет общих делителей, поэтому если число делится на каждое из них, то оно делится и на их произведение. То есть искомое число делится на $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 = 990$. Выпишем все четырёхзначные числа, которые делятся на 990: 1980, 2970, 3960, 4950, 5940, 6930, 7920, 8910, 9900. Наибольшее из них равно 9900, но у него есть совпадающие цифры. А наибольшее из них, у которого все цифры различны – это 8910.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

2. *Ответ:* Одно решение

Решение:

Перепишем систему уравнений, раскрыв модуль:

если $x-1$ – число неотрицательное (т.е. если $x \geq 1$, то $|x-1| = x-1$ и система примет вид

$$\begin{cases} 2y+2x-2=4 \\ y+x=1 \end{cases} => \begin{cases} y+x=3 \\ y+x=1 \end{cases},$$

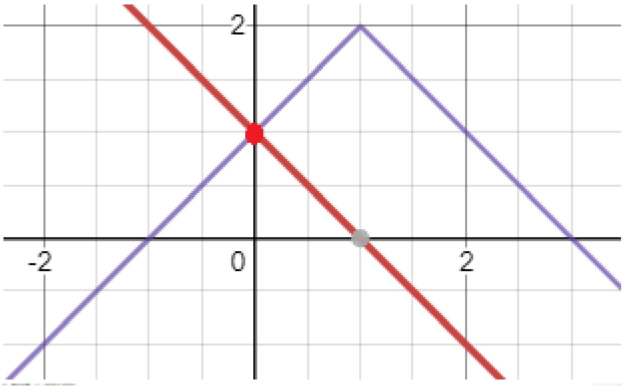
очевидно система не имеет решения;

если $x-1$ – число отрицательное (т.е. если $x < 1$, то $|x-1| = -(x-1)$ и система примет вид

$$\begin{cases} 2y-2x+2=4 \\ y+x=1 \end{cases} => \begin{cases} y-x=1 \\ y+x=1 \end{cases},$$

Решением этой системы является пара $x = 0, y = 1$.

Графическая иллюстрация



Критерии оценивания

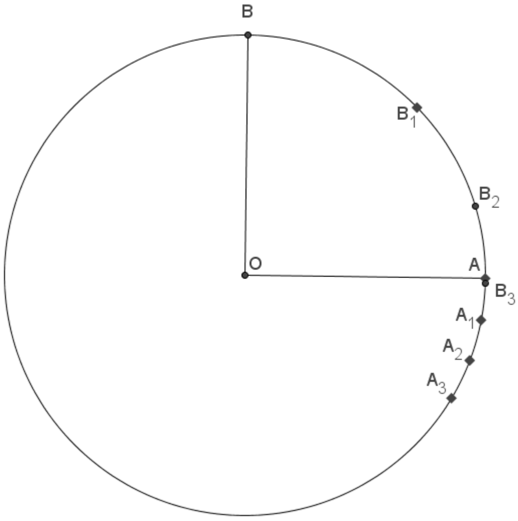
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график функции без учета модуля.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

3. *Ответ:* $28°45'$ или $6°15'$.

Решение:

Возможны два случая.

Случай 1.



$\angle A_1OB_1 = 90°:2 + 10° = 55°$;

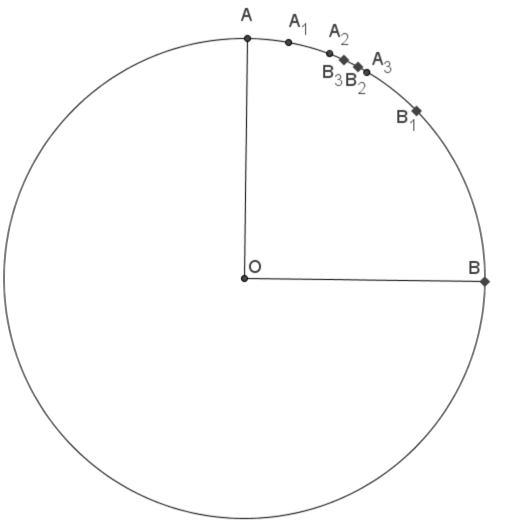
$\angle A_2OB_2 = 55°:2 + 10° =$

$= 37°30'$;

$\angle A_3OB_3 = 37°30':2 + 10° =$

$= 28°45'$.

Случай 2.



$\angle A_1OB_1 = 90°:2 - 10° = 35°$;

$\angle A_2OB_2 = 35°:2 - 10° =$

$= 7°30'$;

$\angle A_3OB_3 = 10° - 7°30':2 = 6°15'$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
6–7	Задача решена правильно, рассмотрены оба случая.
4–5	Рассмотрен только случай №2, который полностью верно разобран.
2–3	Рассмотрен только случай №1, который полностью верно разобран.
1	Приведены верные идеи о разных вариантах, предпринята попытка вычислений,

	однако идеи до конца не реализованы.
0	Задача не решена

4. *Ответ:* Нет, сумма 11 очков имеет в два раза больше шансов выпасть, чем 12.

Решение:

Пусть A = {сумма очков при бросании двух игральных костей равна 11};

B = {сумма очков при бросании двух игральных костей равна 12}.

Поскольку сумма 12 выпадает лишь при одной комбинации – 6 и 6, а сумма 11 при двух комбинациях – 5 и 6, и еще раз 6 и 5, то $P(A)\rangle P(B)$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ*: $\frac{5}{6}$

Решение:

Пусть масса Рапунцель равна m кг, тогда масса её косы составляла 0,4m кг, а её масса без косы – 0,6m кг. Пусть колдунья остригла часть косы массой хкг, после чего масса оставшейся части бороды (0,4m-x) кг стала составлять 10% её массы (m-x) кг. Составим уравнение

$0{,}4m\text{-}x=0{,}1(m\text{-}x)$,

из которого получим $x = \frac{1}{3}m$.

Итак, колдунья остригла $\frac{1}{3}m: 0{,}4m = \frac{5}{6}$ косы Рапунцель.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, представление в виде разности или отношения дробей, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

8 класс

1. *Ответ:* сумма цифр нечётных чисел больше на 499

Решение:

Сумма цифр числа 1 равна сумме цифр числа 1000; остальные числа разобьём на пары: 2–3, 4–5, 6–7, 8–9,. . . , 998–999. В каждой паре единицы нечётного числа больше на 1, чем чётного, а десятков и сотен у них поровну. Всего таких пар 499.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

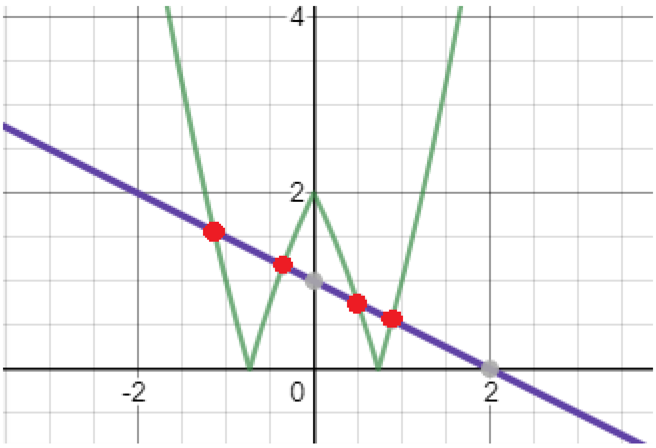
2. *Ответ:* 4 решения.

Решение:

Так как требуется найти количество решений, а не сами решения, то следует предпочесть графический способ. Раскроем модуль и перепишем систему в виде совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \\ y = \frac{-x+2}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x < 0 \\ y = x^2 - 2x - 2 \\ y = \frac{-x+2}{2} \end{cases}$$

Выполним графическое построение.



Очевидно, система имеет 4 решения.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график квадратичной функции без учета модуля.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

3. *Ответ:* $40°$ или $50°$.

Решение:

Заметим, что угол AMB опирается на диаметр, поэтому его величина равна 90°, а величина угла $\mathrm{A_1}M\mathrm{B_1}$ равна половине величины угла A_1OB_1.

Рассмотрим все возможные случаи:

Рисунок	Перемещение точки A	Перемещение точки B	Величина угла A_1OB_1	Величина угла A_1MB_1

1	По часовой стрелке	По часовой стрелке	$90° + 10° = 100°$	$\frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$
2		Против часовой стрелки	$90° - 10° = 80°$	$\frac{1}{2} \cdot 80° = 40°$
3	Против часовой стрелки	По часовой стрелке	$90° - 10° = 80°$	$\frac{1}{2} \cdot 80° = 40°$
4		Против часовой стрелки	$90° + 10° = 100°$	$\frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$

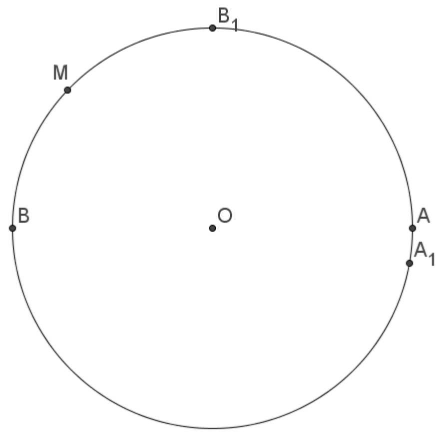


Рис. 1

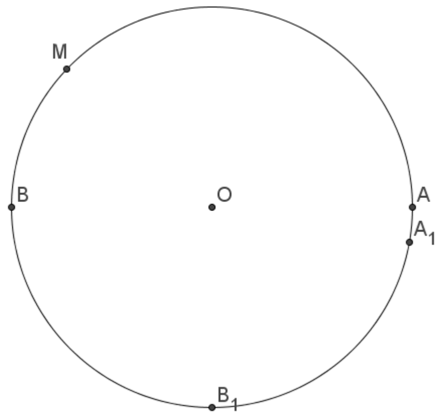


Рис. 2

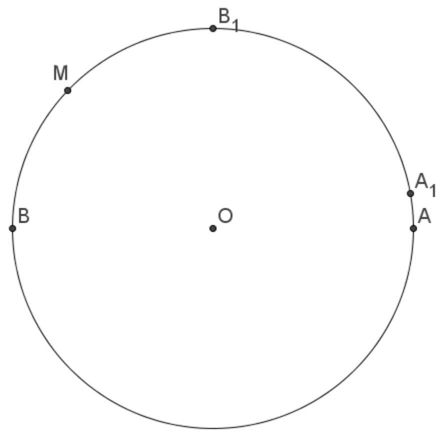


Рис. 3

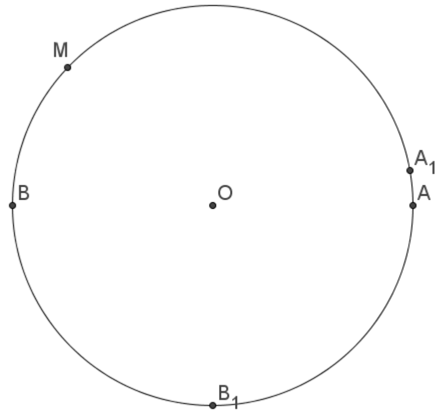


Рис. 4

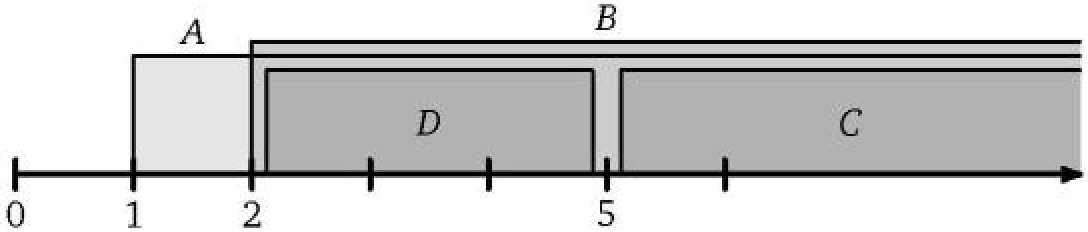
Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
6–7	Задача решена правильно, рассмотрены все случаи
4–5	Рассмотрен только один случай, который полностью верно разобран, указаны другие возможные варианты
2–3	Рассмотрен только один случай, получен верный ответ
1	Приведены верные идеи о разных вариантах, предпринята попытка вычислений, однако идеи до конца не реализованы
0	Задача не решена

4. *Ответ:* Наибольшую вероятность имеет событие А.

Решение:

Расположим события на временной оси.



Событие *A* включает в себя и событие *B*, и событие *C*, и событие *D*, то есть событие *A* наиболее обширное: $C \subset B \subset A$ и $D \subset B \subset A$. Следовательно, $P(C) \le P(B) \le P(A)$ и $P(D) \le P(B) \le P(A)$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ*: 1200

Решение:

Предположим, что солдаты поставлены в m колонн и n шеренг. Тогда в полку mn солдат и $\frac{mn}{100}$ солдат получили новое обмундирование. Согласно условию, не менее чем в $\frac{40n}{100}$ шеренгах есть хотя бы по 1 солдату в новом обмундировании, значит $\frac{mn}{100} \geq \frac{40n}{100}$. Отсюда ясно, что $m \geq 40$. Аналогично, так как не менее чем в $\frac{30m}{100}$ колоннах есть солдаты в новом обмундировании, $\frac{mn}{100} \geq \frac{30m}{100}$. Поэтому $n \geq 30$. Значит в полку не менее , чем 40*30=1200 солдат.

Покажем, что 1200 солдат можно построить таким образом. Построим их в виде прямоугольника 30×40. Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (рис.). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг (30% от 40 – это 12, 40% от 30 – тоже 12).

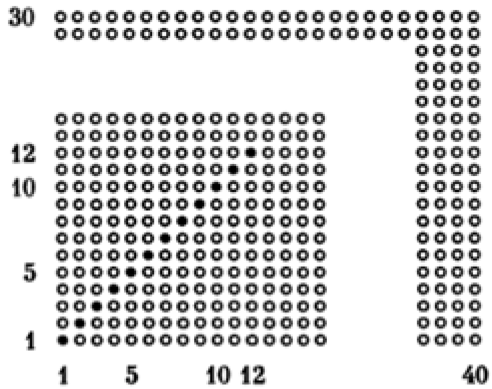


Рис.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного

	обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

9 класс

1. *Решение:*

Пусть даны числа a и b.

Т.к. остаток от одного натурального числа на 11 равен остатку от деления другого натурального числа на 13, то $a = 11x + r_1, b = 13y + r_1$.

Т.к. остаток от деления первого числа на 13 равен от деления на второго числа на 11, то $a = 13t + r_2, b = 11z + r_2$.

Составим суммы данных чисел:

$a + b = 11(x + z) + (r_1 + r_2)$

$a + b = 13(t + y) + (r_1 + r_2)$

Из последних равенств видно, что число $a + b$ делится и на 11 и на 13, значит и делится на $143 = 11 \cdot 13$.

Остатки r_1 и r_2 от деления на 11 и 13 должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} 0 \le r_1 < 11 \\ 0 \le r_2 < 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r_1 \le 10 \\ 0 \le r_2 \le 10 \end{cases}$$

Просуммируем последнее и получим, что $0 \le r_1 + r_2 \le 20$. Что и требовалось доказать.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

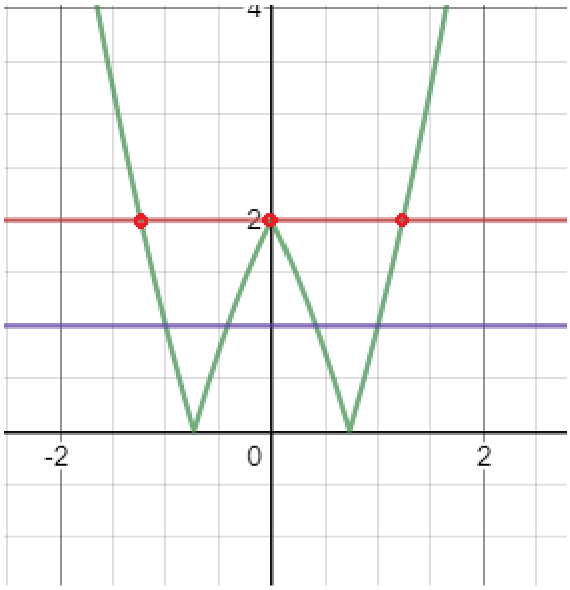
2. *Ответ:* $a = 4$

Решение:

Так как требуется найти количество решений, а не сами решения, то следует предпочесть графический способ. Раскроем модуль и перепишем систему в виде совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2 + 2x - 2 \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x < 0 \\ y = x^2 - 2x - 2 \\ y = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Выполним графическое построение



В зависимости от значения параметра a график второго уравнения представляет собой прямую параллельную оси Ox. Три точки пересечения графиков двух функций (т.е. три решения исходной системы) возможны при пересечении второго графика оси Oy в точке $y = 2$, следовательно, $\frac{a}{2} = 2 \;=>\; a = 4$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график квадратичной функции без учета модуля.

0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

3. *Ответ:* $180°$.

Решение:

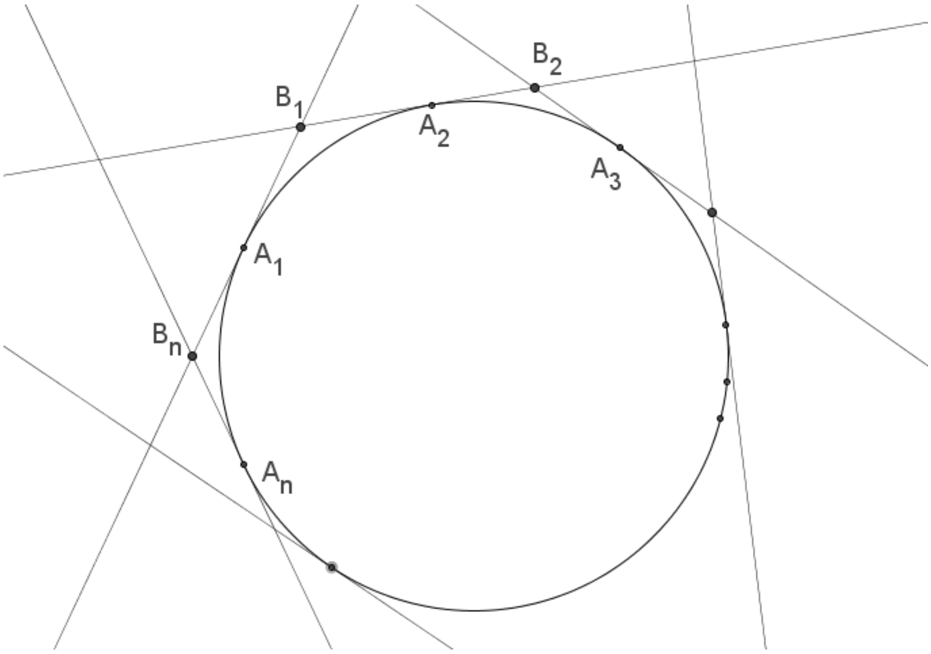


Рис. 1

Используем следующие факты:

1. Каждый из образовавшихся треугольников $A_kB_kA_{k+1}$ имеет сумму углов, равную $180°$.

2. Всего таких треугольников n.

3. Каждый из треугольников $A_kB_kA_{k+1}$ является равнобедренным, причем углы $B_nA_nA_1$ расположены у его основания.

4. Сумма углов $B_1, B_2, \dots, B_n$ равна $180°(n-2)$.

Значит, искомая сумма равна $\frac{1}{2}(180°n - 180°(n-2)) = 180°$.

Примечание. Решить задачу можно, использовав свойства угла между касательной и хордой: угол между касательной и хордой равен половине заключенной между ними дуги. Поскольку таких дуг n, а вместе они образуют полную окружность, то требуемая сумма величин углов равна $\frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
6–7	Задача решена правильно, получено требуемое решение при обобщенных (для

	произвольного n) случаев
	Получен правильный ответ, который обоснован свойством угла между касательной и хордой
4–5	Рассмотрен из возможных (частный) случай, который полностью верно разобран
2–3	Получен правильный ответ, который должным образом не обоснован
1	Построен верный чертеж, указаны свойства углов, ассоциированных с окружностью, предпринята попытка вычислений, однако идеи до конца не реализованы
0	Задача не решена

4. *Ответ:* $1\text{-}2(1\text{-}p)^6+(1\text{-}2p)^6$.

Решение:

Введем обозначения событий: A={В первой корзине есть идея}; B={Во второй корзине есть идея}.

Требуется найти вероятность события $A{\cdot}B$:

$P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$

Вероятность того, что при одном броске Незнайка не попадёт в определённую корзину, равна $1\text{-}p$. Значит, он не попадёт в неё шесть раз с вероятностью $(1\text{-}p)^6$. Поэтому $P(A)=P(B)=1\text{-}(1\text{-}p)^6$. Попасть сразу в две корзины невозможно, поэтому вероятность того, что Незнайка попал хотя бы в одну корзину, равна $2p$. Тогда вероятность не попасть одним броском ни в одну из корзин, равна $1\text{-}2p$, а вероятность не попасть ни разу из шести, равна $(1\text{-}2p)^6$.

Следовательно, $P(A{\cdot}B)=1\text{-}(1\text{-}2p)^6$.

Получаем: $P(A{\cdot}B)=2\text{-}2(1\text{-}p)^6\text{-}1+(1\text{-}2p)^6=1\text{-}2(1\text{-}p)^6+(1\text{-}2p)^6$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.

1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ:* 25 л.

Решение:

Пусть V – объем первого бака (V>2), тогда 4V – объем второго бака. Объем глицерина, оставшегося после переливания в первом баке равен V-2, доля глицерина в первом баке составляла $\frac{V-2}{V}$, а во втором баке $\frac{2}{4V}$, поэтому во второй раз из первого бака взяли $\frac{2(V-2)}{V} = 2 - \frac{4}{V}$ (л), а из второго бака $\frac{2\cdot 2}{4V} = \frac{1}{V}$ (л).

Объем глицерина, оказавшегося после двух переливаний в первом баке, равен $V - 2 - 2 + \frac{4}{V} + \frac{1}{V} = \frac{V^2-4V+5}{V}$ (л), или 0,4V (л). Составим уравнение: $\frac{V^2-4V+5}{V} = 0{,}4V$.

Это уравнение имеет 2 корня: $\frac{5}{3}$ и 5, но так как V>2, то V=5. Тогда V+4V=25. Итак, суммарный объем баков 25 л.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

10 класс

1. *Ответ:* 1000

Решение:

Докажем, что больше 1000 получить невозможно.

1 способ. Пусть число записано цифрами $\overline{abcd}$. Если $\overline{abcd} > a000$, то $\overline{abcd} < \overline{(a+1)000}$, а сумма его цифр $S \geq a+1$, поэтому частное будет меньше 1000.

2 способ.
$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d} = \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d} + 1 \leq \frac{999a+99b+9c}{a+b+c} + 1 = \frac{990a+90b}{a+b+c} + 10 \leq \frac{990a+90b}{a+b} + 10 = \frac{900a}{a+b} + 100 \leq \frac{900a}{a} + 100 = 1000$

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

2. *Решение*:

Упростим функцию, используя основное тригонометрическое тождество и формулы приведения $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1\right)$.

Получим $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$

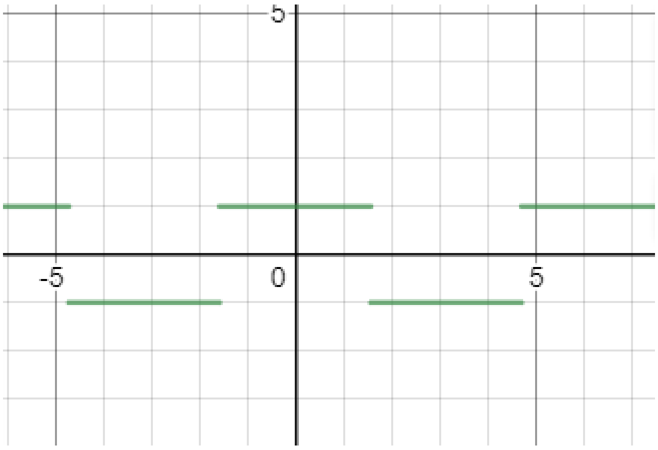
Перепишем функцию y, раскрыв модуль:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } \cos x > 0, \\ -1, & \text{если } \cos x < 0. \end{cases}$$

$\cos x > 0$ на промежутках вида $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$,

$\cos x < 0$ на промежутках вида $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$,

Поэтому множество точек, удовлетворяющих заданному условию, представляет собой объединение отрезков с выколотыми концами, параллельных оси абсцисс (см. рисунок ниже).



Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений или при решении тригонометрического неравенства, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график функции без учета модуля и/или области определения выражения, без учета промежутков знакопостоянства функции косинус.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

3. *Ответ:* $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Решение:

Пусть ребро данного тетраэдра равно 1. Найдем расстояние между центрами двух таких окружностей, зная, что треугольники MO_1O_2 и MDC подобны с коэффициентом $\frac{1}{3}$. Тогда $O_1O_2 = \frac{1}{3}$. Значит, требуется найти площадь поверхности тетраэдра с ребром, равным $\frac{1}{3}$

Имеем:

Площадь каждой грани $s = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Площадь поверхности $S = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

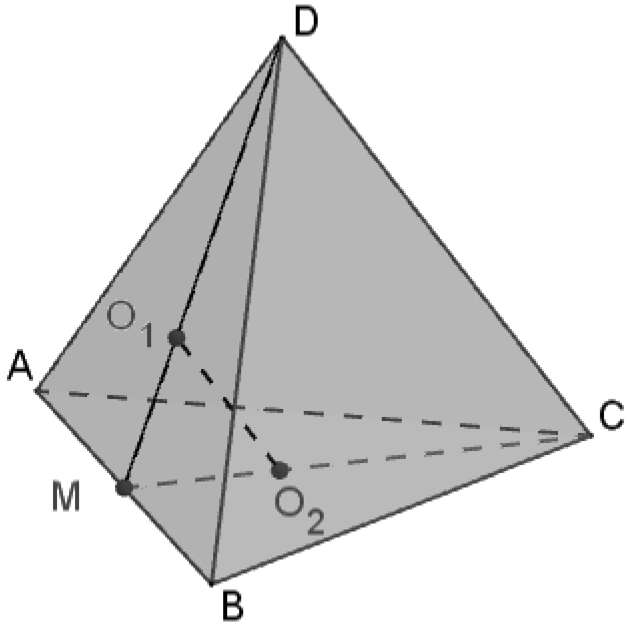


Рис. 1

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
6–7	Задача решена правильно, все рассуждения обоснованы, получен верный ответ
4–5	Верный ответ получен, однако логическая цепочка рассуждений в решении отражена не полностью, отсутствуют обоснования некоторых важных моментов
2–3	Некоторые элементы, необходимые для получения ответа, вычислены верно и с указанием на соответствующие теоремы
1	Построен верный чертеж, предпринята попытка использовать подобие, свойство медиан (биссектрис, высот) правильного треугольника, однако идеи до конца не

	доведены
0	Задача не решена

4. *Ответ:* $\frac{41}{126}$ (или ≈ 0, 325).

Решение:

Пусть A={ Два случайно выбранных носка образуют пару}. Пару могут составить красные, черные и зеленые носки, тогда обозначим события : B={Пара красных носков}; C={Пара черных носков}; D={Пара зеленых носков}.

Очевидно, что событие A можно представить как сумму несовместных событий B, C и D, т.е. $A = B + C + D$.

Найдем вероятность события В. Пусть B_1={Первый носок красный}; B_2={Второй носок красный}. События В1 и В2 зависимы , тогда по теореме умножения $P(B) = P(B_1 \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) = \frac{7}{28} \cdot \frac{7-1}{28-1} = \frac{7}{28} \cdot \frac{6}{27} = \frac{42}{756}$.

Аналогично, $P(C) = \frac{9}{28} \cdot \frac{8}{27} = \frac{72}{756}$ и $P(D) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} = \frac{132}{756}$.

Таким образом, можно высчитать вероятность события A: $P(A) == P(B + C + D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{42}{756} + \frac{72}{756} + \frac{132}{756} = \frac{246}{756} = \frac{41}{126}$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

5. *Ответ:* после выступления в газете нужно в любом порядке 1 раз выступить по телевидению и 2 раза по радио.

Решение:

Сначала следует выступить в газете, а уж потом увеличивать число своих сторонников (1000) с каждым выступлением на радио и телевидении в 1,4 и в 1,8 раз соответственно (последовательность не важна).

Пусть кандидат в депутаты выступит в любом порядке r раз по радио и t раз по телевидению. От этого число его сторонников увеличиться в $n = 1{,}4^r \cdot 1{,}8^t$ раз, но расходы за всю кампанию не должны превысить 112 тыс.р., то есть должно выполниться неравенство:

$32r + 47t \leq 112$. Вычислим показатель эффективности избирательной кампании n, выбирая наибольшее значение *r* для каждого из трех возможных значений *t*:

t=0	*r=3*	$n = 1{,}8^0 \cdot 1{,}4^3 = 2{,}744$
t=1	*r=2*	$n = 1{,}8^1 \cdot 1{,}4^2 = 3{,}528$
t=2	*r=0*	$n = 1{,}8^2 \cdot 1{,}4^0 = 3{,}24$

Как видно из таблицы, наибольшее значение n получится при t=1 и r=2, то есть после выступления в газете нужно в любом порядке 1 раз выступить по телевидению и 2 раза по радио.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

11 класс

1. *Ответ:* $\frac{11111111}{111111111}$

Решение:

Рассмотрим число $a = \underbrace{11\ldots1}_{2007\text{ раз}}$. Заметим, что числитель дроби равен $1234567\overbrace{888\ldots8}^{2000\text{ раз}}7654321 = a\cdot10^7 + a\cdot10^6 + a\cdot10^4 + a\cdot10^3 + a\cdot10^2 + a\cdot10 + a = a\cdot11111111$

.

Аналогично этому знаменатель дроби равен $a\cdot111111111$.

Числа $111\,111\,111$ и $11\,111\,111$ взаимно просты. Убедиться в этом можно используя алгоритм Евклида. Следовательно, $\frac{p}{q} = \frac{a\cdot11111111}{a\cdot111111111} = \frac{11111111}{111111111}$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

2. *Ответ:* $x = 1$.

Решение:

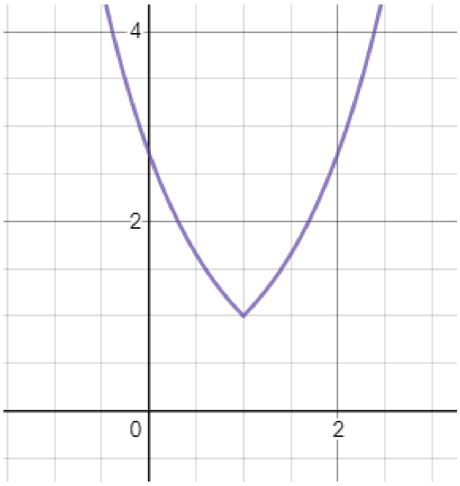
Исходя из сложности нахождения решения трансцендентных уравнений аналитическими методами, рассмотрим геометрический подход к решению этого уравнения. Перепишем его в виде:

$$e^{|x-1|} = -x^2 + 2x.$$

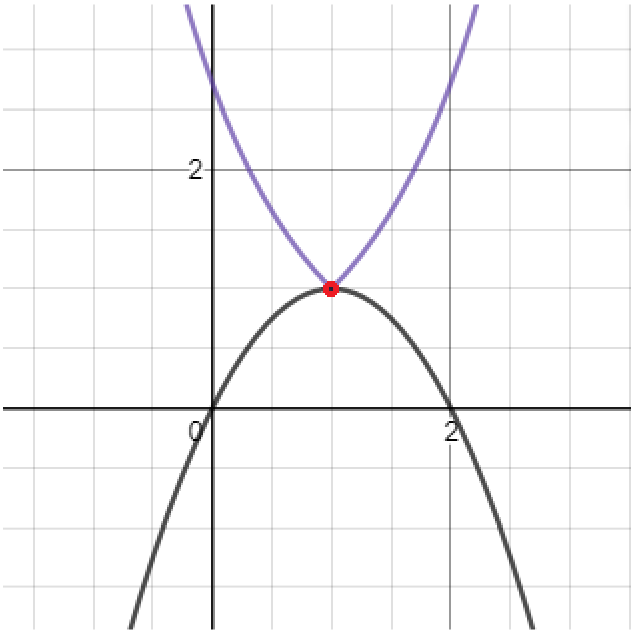
Решению этого уравнения соответствует абсцисса точки пересечения графиков функций

$$y = e^{|x-1|} \text{ и } y = -x^2 + 2x.$$

Функция $y = e^{|x-1|}$ при $x \geq 0$ имеет вид $y = e^{x-1}$, а при $x < 0$ имеет вид $y = e^{-(x-1)}$, т.е график имеет следующую форму с вершиной в точке $(1;1)$ (на рисунках синяя линия).



Графиком функции $y = -x^2 + 2x$ является парабола с ветвями направленными вниз и пересекающая ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 2$, имеющая вершину с координатами $(1;1)$ (на графике серая линия). Следовательно, они имеют одну общую точку, т.е. исходное уравнение имеет одно решение $x = 1$.



Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, полученные при преобразовании выражений, но идея решения реализована верно.
3-4	Рассмотрены частные случаи, и на основе неполной индукции построена часть графика или отдельные точки.
1-2	Построен график показательной функции без учета модуля и его свойств.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

3. *Ответ:* $\frac{9\sqrt{2}(4+\sqrt{3})^3}{4}$.

Решение:

Сделаем плоский чертеж, соответствующий условию задачи (рис. 1).

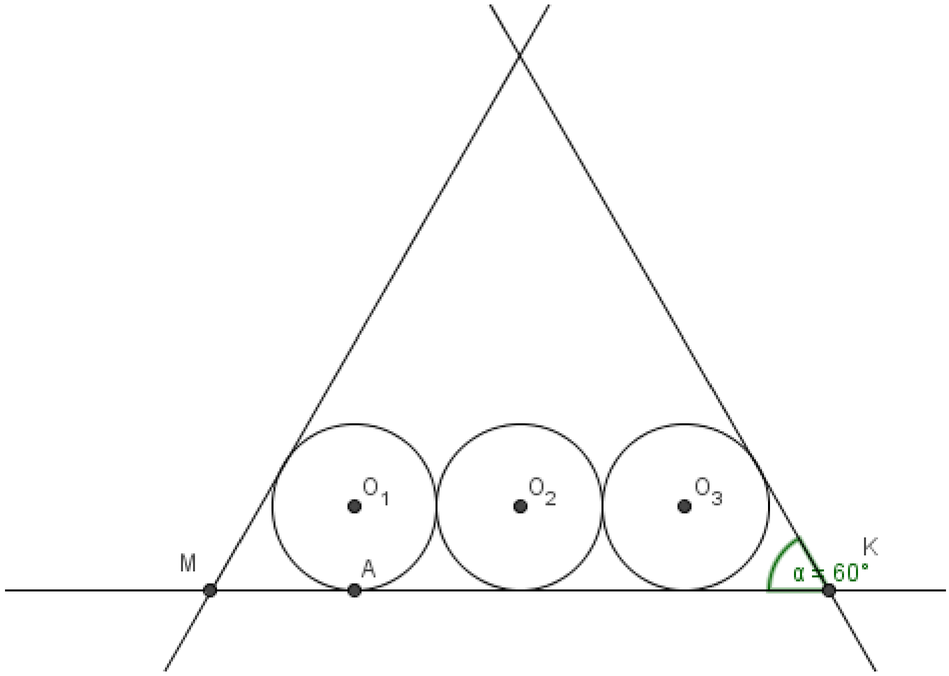


Рис. 2

Из чертежа видно, что длина отрезка MK равна $3 \cdot (1 + 2 + 1 + 2 \cdot \cos 30°)$. Значит, ребро тетраэдра составляет $3 \cdot (4 + \sqrt{3})$.

Объем правильного тетраэдра с ребром a вычисляется по формуле

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, поэтому искомый объем равен $3^3 \cdot \left(4+\sqrt{3}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}\left(4+\sqrt{3}\right)^3}{4}$.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
6–7	Задача решена правильно, все рассуждения обоснованы, получен верный ответ.
4–5	Верный ответ получен, однако логическая цепочка рассуждений в решении отражена не полностью, отсутствуют обоснования некоторых важных моментов.
2–3	Некоторые элементы, необходимые для получения ответа, вычислены верно и с указанием на соответствующие теоремы.
1	Построен верный чертеж, предпринята попытка вычислить отдельные элементы, однако идеи до конца не доведены.
0	Задача не решена.

4. Ответ: Нет, в такой компании не существует дискриминация женщин в оплате труда.
Решение:

Для решения задачи необходимо ответить на вопрос: «Чему равняется вероятность того, что случайно выбранный работник будет женщиной, имеющей высокую заработную плату?» и сравнить ее с вероятностью того, что наудачу выбранный работник любого пола имеет высокую зарплату.

Пусть A = {случайно выбранный работник имеет высокую зарплату};

B = {случайно выбранный работник — женщина}.

События A и B — зависимые. По условию $P(A \cdot B) = 0{,}064$; $P(B) = 0{,}40$; $P(A) = 0{,}21$. Необходимо найти условную вероятность $P_B(A)$. Используя теорему умножения вероятностей для зависимых событий $P(A\cdot B) = P(B)\cdot P_B(A)$, выразим условную вероятность $P_B(A)$. Получим $P_B(A) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)} = \frac{0{,}064}{0{,}4} = 0{,}16$.

Поскольку $P_B(A) = 0{,}16$ меньше, чем $P(A) = 0{,}21$, то можно заключить что женщины, работающие в торговой компании, имеют меньше шансов получить высокую заработную плату по сравнению с мужчинами.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения

7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.

5. Ответ: 24 часа

Решение:

Отметим на одном циферблате положения часовых стрелок всех часов. Циферблат разобьется на 5 секторов. Занумеруем их по кругу (см. рис.).

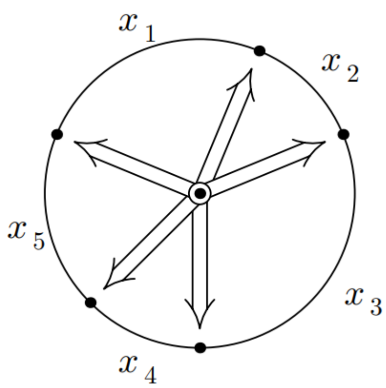


рис.

Пусть часовая стрелка проходит секторы за время x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 соответственно (некоторые из этих чисел, возможно, нулевые).

Заметим, что если мы станем устанавливать на всех часах время, соответствующее положению внутри сектора, то каждая часовая стрелка пройдет через начало сектора. Это значит, что суммарное время перевода окажется заведомо больше, чем если бы мы устанавливали все часы на начало сектора. Обозначим через S_i суммарное время, необходимое для установки всех часов на начало i-го сектора. Ясно, что время перевода отдельной стрелки является суммой некоторых x_j . Например, время перевода на начало первого сектора равно x_5 для пятых часов и $x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ для вторых. Тогда $S_1 = (x_2+x_3+x_4+x_5)+(x_3+x_4+x_5)+(x_4+x_5)+x_5=x_2+2x_3+3x_4+4x_5$. Остальные S_i выражаются аналогично. Тогда $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (1 + 2 + 3 + 4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = = 10 \cdot 12 = 120$ часов. Поэтому наименьшая сумма не превосходит 120 : 5 = 24 часа. С другой стороны, если все секторы одинаковы (например, часы показывают 12 ч, 2 ч 24 мин, 4 ч 48 мин, 7 ч 12 мин и 9 ч 36 мин), то все S_i равны 24 часам, поэтому менее, чем 24 часами не обойтись.

Критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
5-6	Решение содержит незначительные погрешности, некоторые переходы не обоснованы, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
3-4	Приведены идеи для решения, но преобразования содержат существенные ошибки или не доведены до конца.
1-2	Дан верный ответ, который обоснован некоторыми аргументами, но ясного обоснования решение не содержит.
0	Решение отсутствует.